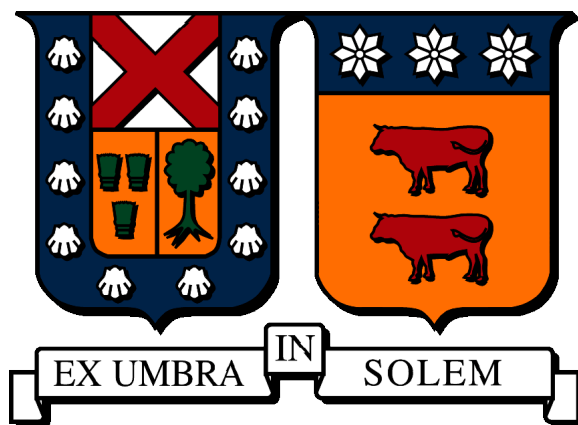


UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO-CHILE



Título de la tesis

Tesis presentada por:

Nombre del autor de la tesis

*Como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención
Matemática*

Director de Tesis:

Nombre Director de Tesis

Mes, Año

TÍTULO DE LA TESIS:
(completar) Título de la tesis.

AUTOR: Nombre del autor de la tesis

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN DE TESIS:

Integrantes	Institución
Evaluador 1	Nombre Institución, País.
Evaluador 2	Nombre Institución, País.
Evaluador 3	Nombre Institución, País.

Ciudad, Mes año.

Resumen

En este documento se presentan algunos ejemplos del uso del formato de tesis MCMM para presentar definiciones, lemas, teoremas, ecuaciones, etiquetas (labels), citar referencias bibliográficas, etc.

Abstract

(Debe ser una traducción al inglés del Resumen anterior.)

This document presents some examples of the use of the MCMM thesis format to present definitions, lemmas, theorems, equations, labels, cite bibliographic references, etc.

Agradecimientos

Esta sección es opcional y de máximo 1 página.

Dedicado a / Para ...

...

La dedicatoria es opcional y de máximo 200 caracteres.

Índice general

Índice de figuras	7
1. Introducción	8
2. Marco teórico	9
2.1. Sistemas dinámicos a tiempo continuo	9
2.1.1. Equivalencias y conjugaciones topológicas	10
3. Nombre del capítulo	12
4. Nombre del capítulo	13
5. Conclusiones y discusión	14
Bibliografía	15

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presentan las principales definiciones y resultados con los que se trabajará a lo largo de la exposición de resultados.

2.1. Sistemas dinámicos a tiempo continuo

Definición 2.1.1. Decimos que la tripleta $\{\mathcal{I}, \Omega, \varphi^t\}$ es un sistema dinámico, donde \mathcal{I} representa el conjunto de tiempo, Ω es el **espacios de fase o espacio de estados** y $\varphi^t : \Omega \rightarrow \Omega$ es un operador de evolución parametrizado por $t \in \mathcal{I}$ y que satisface

1. $\varphi^0 = id$ (operador identidad),
2. $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$.

Para lo que sigue siempre supondremos que $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que la forma general para un sistema dinámico a tiempo continuo en \mathbb{R}^n queda definida por el flujo de un campo de vectores

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (2.1.1)$$

donde $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ corresponde al vector de variables de estado que evoluciona para $t > 0$ y $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de vectores de clase C^k , $k \geq 1$. Si $\mathbf{X} = (f_1, \dots, f_n)$, podemos escribir de manera equivalente (2.1.1) como un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias escalares

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n' = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2.1.2)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Definición 2.1.2. Una **órbita** o trayectoria de (2.1.1) o (2.1.2) que comienza en un punto $\mathbf{p} \in \Omega$ es un subconjunto ordenado del espacio de estados \mathbf{X} , dado por la evolución del flujo φ^t que pasa por \mathbf{p} :

$$\mathcal{O}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \varphi_{\mathbf{p}}(t), \forall t \in \mathcal{I}\}.$$

2.1.1. Equivalencias y conjugaciones topológicas

Definición 2.1.3. Sean dos sistemas dinámicos a tiempo continuo n -dimensionales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y}' = \mathbf{Y}(\mathbf{y}),$$

definidos en regiones $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ respectivamente. Decimos que son topológicamente equivalentes en subconjuntos $U_1 \subset \Omega_1$ y $U_2 \subset \Omega_2$ si existe un homeomorfismo

$$\eta : U_1 \rightarrow U_2$$

el cual mapea órbitas del primer sistema en órbitas del segundo preservando la orientación de las trayectorias y del tiempo.

Más aún, si η es un difeomorfismo de clase C^k , $k \geq 1$, decimos que ambos sistemas son C^k -equivalentes [5].

Observación 2.1.1. Si Φ y Ψ son los flujos asociados a los sistemas \mathbf{X} e \mathbf{Y} respectivamente, entonces una equivalencia topológica, inducida por el homeomorfismo o difeomorfismo η según sea el caso, queda definida por la condición

$$\eta(\Phi^t(\mathbf{x})) = \Psi^{\tau_{\mathbf{y}}(t)}(\mathbf{y}), \tag{2.1.3}$$

con $\mathbf{y} = \eta(\mathbf{x})$, donde $\tau_{\mathbf{y}}$ es una función creciente de t para todo \mathbf{y} , que además satisface $\tau_{\mathbf{y}}(0) = 0$. Es decir, la escala temporal podría no preservarse bajo equivalencias topológicas [2].

Ejemplo 2.1.1. Si derivamos la ecuación (2.1.3) con respecto a t y evaluamos en $t = 0$ obtenemos

$$\left(D\eta(\Phi^t(\mathbf{x})) \frac{d\Phi^t}{dt}(\mathbf{x}) \right) \Big|_{t=0} = \frac{d\Psi^{\tau_{\mathbf{y}}(t)}}{dt}(\eta(\mathbf{x})) \Big|_{t=0}. \tag{2.1.4}$$

Sean \mathbf{X} e \mathbf{Y} , los campos vectoriales asociados a Φ y Ψ , respectivamente. Luego usando que

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \mathbf{X}(\Phi(t)), \quad \Phi^0 \equiv \text{Id},$$

tenemos

$$\left(D\eta(\Phi^t(\mathbf{x})) \frac{d\Phi^t}{dt}(\mathbf{x}) \right) \Big|_{t=0} = D\eta(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

mientras que

$$\frac{d\Psi^{\tau_{\mathbf{y}}(t)}}{dt}(\eta(\mathbf{x})) \Big|_{t=0} = \left(\tau'_{\mathbf{y}}(t) \frac{d\Psi^{\tau_{\mathbf{y}}(t)}}{d\tau_{\mathbf{y}}} \right) \Big|_{t=0} = \tau'_{\mathbf{y}}(t)\mathbf{Y}(\mathbf{y}).$$

Por lo tanto en (2.1.4) se tiene que

$$D\eta(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{y})\mathbf{Y}(\mathbf{y}), \quad (2.1.5)$$

donde $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ toma valores positivos correspondientes a la reparametrización del tiempo, y también $\rho(\mathbf{y}) = \tau'_{\mathbf{y}}(0)$ es un factor de escala positivo que altera la magnitud pero no la dirección de $\mathbf{Y}(\mathbf{y})$.

A partir de (2.1.5) si \mathbf{Y} es nuestro sistema original, que es topológicamente equivalente al campo \mathbf{X} , entonces se tiene la relación [1]:

$$\mathbf{X} = \rho(\mathbf{y}) (D\eta^{-1} \circ \mathbf{Y} \circ \eta). \quad (2.1.6)$$

Teorema 2.1.1 (Hartman-Grobman [1]). Sea \mathbf{x}^* un punto de equilibrio hiperbólico de

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^k , $k \geq 1$. Entonces existe una vecindad $\mathcal{U} \subseteq \Omega$ de \mathbf{x}^* y una vecindad $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene al origen tal que $\mathbf{X}|_{\mathcal{U}}$ es topológicamente equivalente a su linealización en \mathcal{V} , es decir, al sistema

$$\mathbf{x}' = D\mathbf{X}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}.$$

Demostración. Ver [6]. □

Lemma 2.1.1. Los multiplicadores $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ de la matriz $DP(\xi^*)$ del mapeo de Poincaré P asociado al ciclo L_0 son independientes de la elección del punto \mathbf{q} en Γ , de la sección transversal Σ , y de las coordenadas locales en Σ .

Demostración. Ver [3]. □

La literatura de referencia se completa con un par de artículos en revistas científicas como [4, 7].

Capítulo 3

Nombre del capítulo

Capítulo 4

Nombre del capítulo

Capítulo 5

Conclusiones y discusión

Bibliografía

- [1] D. Arrowsmith & C. Place, *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge, 2011.
- [2] J. Guckenheimer & P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1986.
- [3] Y. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd edition, Springer, 2004.
- [4] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975), pp. 985–992.
- [5] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev & L. O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part I)*, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A Vol. 4, World Scientific Publishing, 1998.
- [6] C. Robinson, *Dynamical Systems Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, 2nd Edition, CRC Press, Taylor and Francis Group.
- [7] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*. In *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980 (pp. 366–381). Springer, Berlin, Heidelberg, 1981.